Peter Hager: Eine kleine mathematische Auffrischung

Übersicht

Formeln und Beispiele

Literaturhinweis

- Falkenberg: „Mathematik für den Wirtschaftspraktiker“, Linde 1975
- Kruschwitz: „Finanzmathematik“, Oldenbourg, 2010, zitiert: *Kruschwitz (2010)*

1. Einführung

Eine Unternehmensbewertung basiert auf der Zinseszinsrechnung.

2. Zinseszinsrechnung[1]

2.1. Endwert

Vereinfachend wird von gleichbleibenden ganzjährigen Zinsen ausgegangen.

Beispiel 1: Zinseszinsrechnung
Eine Einlage von 1.000 wird 5 Jahre mit 5% verzinst. Wie hoch ist der Endwert?

Jahr	0	1	2	3	4	5
Übertrag		1.000,00	1.050,00	1.102,50	1.157,63	1.215,51
Einlage	1.000,00					
Zwischensumme	1.000,00	1.000,00	1.050,00	1.102,50	1.157,63	1.215,51
5%		50,00	52,50	55,13	57,88	60,78
Endwert	1.000,00	1.050,00	1.102,50	1.157,63	1.215,51	1.276,29

Wichtig für die Investitionsrechnung ist, dass alle Zu- und Abflüsse zum Ende einer Periode stattfinden, daher wird für die Einlage (=Investition) die Periode 0 vorgeschaltet, auf die sich in weiterer Folge alle Berechnungen beziehen.

Um den **Endwert der Einzahlung** zu berechnen, muss man jedoch nicht in einer Staffel den Zins für jedes Jahr berechnen. Einfacher geht es mit der Formel:

Formel 1: Endwert einer Einzahlung

$$EW = BW * q^n$$

EW = Endwert
BW = Barwert = Anfangswert (= Einzahlung)
q = Aufzinsungsfaktor (=1+p/100) = 1 + i
i = p/100
p = Zinssatz
n = Anzahl der Jahre

Bezogen auf das vorherige Beispiel lässt sich mit dieser Formel der Endwert leicht berechnen
$EW=1.000*1,05^5=1.276,28$

Beispiel 2: Zinseszins
Die Bank bietet 2 Alternativen:
a) Verzinsung 1. Jahr 5%; 2. Jahr 1%
b) Verzinsung 1. Jahr 1%, 2. Jahr 5%

[1] Vgl. Kruschwitz (2010), S. 9ff

Var. a)			
Jahr	0	1	2
Übertrag		1.000,00	1.050,00
Einlage	1.000,00		
Zwischensumme	1.000,00	1.000,00	1.050,00
		5%	1%
		50,00	10,50
Endwert	1.000,00	1.050,00	**1.060,50**

Var. b)			
Jahr	0	1	2
Übertrag		1.000,00	1.010,00
Einlage	1.000,00		
Zwischensumme	1.000,00	1.000,00	1.010,00
		1%	5%
		10,00	50,50
Endwert	1.000,00	1.010,00	**1.060,50**

Da schafft das **Kumulativgesetz** (a * b = b *a) Gleichheit.

2.2. Barwertermittlung

Will man umgekehrt den Anfangswert (= Einzahlung) ermitteln muss man nur die Formel umformen:

$$BW = \frac{EW}{q^n}$$

Wenn eine Zahl durch einen Faktor dividiert wird, kann man stattdessen diese auch mit dem Faktor hoch der negativen Exponentialzahl multiplizieren:

$5 / 2 = 5 * 2^{(-1)} = 2,5$
$20 / 2^2 = 20 * 2^{(-2)} = 5$

Formel 2: Barwert einer Einzahlung[2]

$$BW = \frac{EW}{q^n} = EW * q^{-n}$$

Beispiel 3: Barwert
Wenn ich in 5 Jahren 2.000 haben möchte, wie viel muss ich heute auf ein Sparbuch mit fixen 1,5% legen?

$BW = 2.000 * 1,015^{(-5)}$
$BW = 1.856,52$

Der Faktor $q^{(-k)}$ wird oft als **Barwertfaktor** bezeichnet, da er den Gegenwartswert (= Barwert) einer Einzahlung bezeichnet. Der Faktor $q^{(-1)}$ wird oft als **Diskontierungsfaktor** bezeichnet.

2.3. Zinssatzermittlung

Formel 3: Ermittlung des Zinssatzes[3]

$$i = \sqrt[n]{\frac{EW}{BW}} - 1$$

---

[2] Erläuterung bei Formel Endwert
[3] Erläuterung bei Formel Endwert

Beispiel 4: Zinssatz
Welchem Zinssatz entspricht ein Endwert von 2.000 bei 7 Jahren Laufzeit und einem Anfangskapital von 1.000

$i = \sqrt[7]{2000/1000} - 1$ $i = 10{,}41$	i=e[ln(2.000/1000)*1/7] -1 i = 10,41%

2.4. Ermittlung der Laufzeit

Formel 4: Ermittlung der Laufzeit[4]

$$n = \frac{\ln \frac{EW}{BW}}{\ln q}$$

Beispiel 5: Laufzeit
Wie lange muss man 9.000€ zu 4% anlegen, damit man 10.000€ hat?

n=ln(10.000/9.000)/(ln1,04)
n = 2,69 Jahre

2.5. Anwendungsfall: Diskontierung von Ab-/Zuflüssen

Basis der Investitionsrechnung sind die Zahlungsströme. Diese werden mit dem Barwertfaktor auf den Barwert der Investition diskontiert. Eine Investition ist dann sinnvoll, wenn der Barwert der Investition positiv ist.

Beispiel 6: Barwert einer Investition
Eine Investition erzielt bei einer Einzahlung von 1.000, Auszahlungen von 700, 500 und 300 in den Folgejahren. Der Zinssatz beträgt 8%. Wie hoch ist der Barwert der Investition?

	0	**1**	**2**	**3**
Einzahlung	-1.000,00			
Auszahlung		700,00	500,00	300,00
Zwischensumme	-1.000,00	700,00	500,00	300,00
BWF	1	0,92592593	0,85733882	0,79383224
BW	-1.000,00	648,15	428,67	238,15
Summe	**314,97**			

3. Rentenrechnung[5]

Eine Barwerttabelle kann sehr groß werden, wenn zum Bespiel eine Investition einen Rückfluss über 30 Jahre aufweist. Eine mögliche Vereinfachung ist eine geometrische Reihe.

Geometrische Reihe:
Ist eine Zahlenfolge bei denen benachbarte Glieder den gleichen Quotienten aufweisen.

4 Erläuterung bei Formel Endwert

5 Vgl. Kruschwitz (2010), S. 43ff

Auf der geometrischen Rente beruht die Rentenrechnung. Dabei sind verschiedene Arten zu unterscheiden[6]:

Rentenhöhe	*gleichbleibend*	veränderlich
Rentendauer	*Endliche Rente*	*Unendliche Rente*
Terminierung der Zahlung	Vorschüssige Rente	*Nachschüssige Rente*
Verhältnis von Zins und Rentenperiode	*Jährliche Rente* *mit jährlichem* oder unterjährlichem *Zins*	Unterjährige Rente mit jährlichem oder unterjährlichem Zins

In der Unternehmensbewertung interessieren uns nur gleichbleibende oder veränderliche, nachschüssige jährliche Renten mit jährlicher Verzinsung. Unterjährige Verzinsung und Ausschüttung sind zwar plausibel, aber zu kompliziert. Die Renten können endlich und unendlich sein.

3.1. Endliche Rente

Formel 5: Endwert einer nachschüssigen Rente

$$EW = R\frac{q^n - 1}{q - 1} = R\frac{q^n - 1}{i}$$

Formel 6: Barwert einer nachschüssigen Rente

$$BW = R\frac{q^n - 1}{iq^n}$$

Beispiel 7: Barwert nachschüssige Rente

Eine Investition erbringt über 4 Jahre eine jährliche Auszahlung von 6.000€ bei einem internen Zinssatz von 5%.

BW=6.000*(1,05^4-1)/(0,05*1,05^4)=21.275,70

Formel 7: Bestimmung der Rentenhöhe

$$R = EW\frac{i}{q^n - 1}$$

$$R = BW\frac{iq^n}{q^n - 1}$$

Schwerer ist die Berechnung des Zinssatzes. Dabei wird die Gleichung des Endwertes so umgeformt, dass sich eine Funktion f(i) mit dem Wert Null auf der einen Seite und die übrigen Variablen auf der anderen Seite stehen. Durch Differenzierung f(i) erhält man die erste Ableitung f‘(i) daraus kann durch die Newtonsche Interation der Zinssatz ermittelt werden, in dem man von i_k den Quotienten aus f(i_k) und f‘(i_k) abzieht bis dieser Quotient Null ist.

Das Iterationsverfahren nach Newton führt schnellstmöglich zum richtigen Zinssatz.. Die Ableitung funktioniert auch mit dem Barwert (nur ist da die Formel deutlich komplizierter). Für die Ableitung ist eine Excel-Tabelle zu empfehlen, da man sich beim Taschenrechner schon man vertippen kann.

[6] Die für die Unternehmensbewertung relevanten sind kursiv gesetzt.

Formel 8: Zinssatzermittlung einer endlichen Rente

$$f(i) = -EW + R\frac{q^n - 1}{i}$$

$$f'(i) = R\frac{inq^{n-1} - q^n + 1}{i^2}$$

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

Nullpunkt $i \Leftrightarrow \frac{f(i_k)}{f'(i_k)} = 0 \Leftrightarrow i_k = i_{k+1}$

Beispiel 8: Zinssatz einer nachschüssigen Rente

Aus 40 nachschüssigen Einzahlungen von 1.000€ soll ein Endkapital von 200.000 entstehen.

K	ik	q	f(i_k)	f'(i_k)	f(ik)/f'(ik)
0	0,0600	1,0600	-45.238,03	3.889.638,90	-0,0116
1	0,0716	1,0716	8.218,74	5.386.282,38	0,0015
2	0,0701	1,0701	173,72	5.160.235,10	0,0000
3	0,0701	1,0701	0,08	5.155.358,90	0,0000
4	0,0701	1,0701	0,00	5.155.356,59	0,0000

Formel 9: Laufzeit einer nachschüssigen Rente

$$n = \frac{\ln(1 + \frac{iEW}{R})}{\ln q}$$

$$n = \frac{\ln(\frac{R}{R - iBW})}{\ln q}$$

Beispiel 9: Laufzeit nachschüssige Rente
Wie oft kann man aus einem Anfangskapital von 10.000 bei 4% Zinssatz eine Rente von 1.000 entnehmen?

n=ln(1.000/(1.000-0,04*10.000))/ln1,04=13,024 gerundet 13 Jahre

3.2. Ewige Rente

Die geometrische Reihe weist eine zeitliche Begrenzung auf. Wenn sie gegen unendlich geht, kann die Summe durch folgende Formel berechnet werden:

Formel 10: Ewige Rente

$$BW = \frac{R}{i}$$

Beispiel 10: Ewige Rente
Ein Unternehmen erwirtschaftet einen Überschuss von 1.000. Es ist davon auszugehen, dass dieser Erfolg auf Dauer nachhaltig ist. Der interne Zinsfuß beträgt 8%

BW = R * / i
BW = 1.000 / 0,08
BW = 12.500

Beispiel 11: Ewige Rente nach einer geometrischen Reihe
Laut Prognoserechnung wird im Detailprognosezeitraum von 3 Jahren ein Ertrag von jährlich 10.000 erzielt, anschließend ist eine ewige Rente mit 5.000 zu berücksichtigen, 9% Verzinsung

BW= BW Zeitrente + abgezinste ewige Rente
BW = R_1*(q^n-1)/(i*q^n) + R_2/i q^{-n}
BW = 10.000 * ($1{,}09^3$ -1)/(0,09*$1{,}09^3$) + 5.000/0,09*$1{,}09^{-3}$
BW = 25.312,95+42.899,08
BW = 68.212,03

Wenn eine ewige Rente auf eine Zeitrente folgt wird in der Praxis häufig der falsche Exponent für die Diskontierung gewählt. Das erste Glied der Zeitrente wird mit q^1 diskontiert, das k-te mit q^k. Eine ewige Rente ab Periode 1 wird nicht diskontiert. D.h. mathematisch mit q^0, das entspricht daher q^{1-1}. Eine ewige Rente nach 4 Jahren ist daher nicht mit q^4, sondern mit q^{4-1} zu diskontiert.

Beispiel 12: Abzinsung ewige Rente
Ein Unternehmer erwartet folgende Ausschüttungen 2006: 700, 2007: 500, 2008. 300 und ab 2009: 400 Der interne Zinsfuß beträgt 8%

per 31.12.	2005	2006	2007	2008	2009
EZ/AZ		700,00	500,00	300,00	400,00
Faktor					0,08
Basis		700,00	500,00	300,00	5.000,00
k		1	2	3	~~4~~
q^-k		0,92592593	0,85733882	0,79383224	~~0,73502985~~
BW ger		648,15	428,67	238,15	~~3.675,15~~
Summe	4.990,12				

Würde die ewige Rente von Anfang an anfallen, würde sie nicht abgezinst, die nächste Tabelle zeigt die Verschiebung um jeweils ein Jahr.

	2005	2006	2007	2008	2009
EZ/AZ		400,00	400,00	400,00	400,00
Faktor		0,08	0,08	0,08	0,08
Basis		5.000,00	5.000,00	5.000,00	5.000,00
k		0	1	2	3
q^-k		1	0,92592593	0,85733882	0,79383224
BW		5.000,00	4.629,63	4.286,69	3.969,16

Der Wert ist daher richtig wie folgt zu berechnen

EZ/AZ		700,00	500,00	300,00	400,00
Faktor					0,08
Basis		700,00	500,00	300,00	5.000,00
k		1	2	3	*3*
q^-k		0,92592593	0,85733882	0,79383224	*0,79383224*
BW ger		648,15	428,67	238,15	*3.969,16*
Summe	5.284,13				

4. Exkurs Annuitätenrechnung

Für viele Anwendungen (z.B. Leasing) benötigt man eine Annuitätenrechnung. Da es sich dabei um Verbindlichkeiten handelt sind die Zahlungen vorschüssig.

Annuität:
die Tilgung einer Kapitalschuld erfolgt in gleichmäßigen Jahreszahlungen.[7]

Formel 11: Kapitalwert einer Annuität

$$BW = R * \frac{q^n - 1}{iq^n}$$

Häufiger kommt es vor, dass man die gleich bleibende Annuität berechnen muss.

Formel 12: Annuitätenberechnung

$$R = BW * q^n * \frac{q-1}{q^n - 1}$$

Beispiel 13: Berechnung einer Annuität
Ein Kredit iHv 50.000,00 soll bei 3,5% Zinsen in 5 Jahren
a) in gleich hohen Raten;
b) mit jährlich gleich hoher Tilgung
abgestattet werden.

R = BW * q^n (q-^{1}) / (q^n – 1)
R = 50.000 $1{,}035^5$ (1,035 - 1) / ($1{,}035^5$ – 1)
R = 11.074,07

Annuität	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
AB		50.000,00	40.675,93	31.025,52	21.037,34	10.699,58
Kredit	50.000,00					
Annuität		-11.074,07	-11.074,07	-11.074,07	-11.074,07	-11.074,07
Zins		1.750,00	1.423,66	1.085,89	736,31	374,49
SB	50.000,00	40.675,93	31.025,52	21.037,34	10.699,58	0,00

gleiche Tilgung	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
AB		50.000,00	40.000,00	30.000,00	20.000,00	10.000,00
Kredit	50.000,00					
Tilgung		10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00
Zins		1.750,00	1.400,00	1.050,00	700,00	350,00
Zahlung		11.750,00	11.400,00	11.050,00	10.700,00	10.350,00
SB	50.000,00	40.000,00	30.000,00	20.000,00	10.000,00	0,00

[7] Gabler, 11. Auflage Bd. 1

Zusammenfassung der Formeln:

Formel 1 Endwert einer Einzahlung

$$EW = BW * q^n$$

Formel 2 Barwert einer Einzahlung

$$BW = \frac{EW}{q^n} = EW * q^{-n}$$

Formel 3 Ermittlung des Zinssatzes

$$i = \sqrt[n]{\frac{EW}{BW}} - 1$$

Formel 4 Ermittlung der Laufzeit

$$n = \frac{\ln \frac{EW}{BW}}{\ln q}$$

Formel 5: Endwert einer nachschüssigen Rente

$$EW = R\frac{q^n - 1}{q - 1} = R\frac{q^n - 1}{i}$$

Formel 6: Barwert einer nachschüssigen Rente

$$BW = R\frac{q^n - 1}{iq^n}$$

Formel 7: Bestimmung der Rentenhöhe

$$R = EW\frac{i}{q^n - 1}$$

$$R = BW\frac{iq^n}{q^n - 1}$$

Formel 8: Zinssatzermittlung einer endlichen Rente

$$f(i) = -EW + R\frac{q^n - 1}{i}$$

$$f'(i) = R\frac{inq^{n-1} - q^n + 1}{i^2}$$

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

Nullpunkt $i \Leftrightarrow \frac{f(i_k)}{f'(i_k)} = 0 \Leftrightarrow i_k = i_{k+1}$

Formel 9: Laufzeit einer nachschüssigen Rente

$$n = \frac{\ln(1 + \frac{iEW}{R})}{\ln q}$$

$$n = \frac{\ln(\frac{R}{R - iBW})}{\ln q}$$

Formel 10: Ewige Rente

$$BW = \frac{R}{i}$$

Formel 11 Kapitalwert einer Annuität

$$BW = R * \frac{q^n - 1}{iq^n}$$

Formel 12: Annuitätenberechnung

$$R = BW * q^n * \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

Abkürzungsverzeichnis

EW = Endwert
BW = Barwert = Anfangswert (= Einzahlung)
q = Aufzinsungsfaktor (=1+p/100) = 1 + i
i = p/100
p = Zinssatz
k = Anzahl der Jahre
n = Laufzeit