

Ing. Mag. Peter Hager: Eine kleine mathematische Auffrischung¹

Vorwort	2
Abkürzungsverzeichnis	2
1. Zinseszinsrechnung	2
1.1. Endwert	2
1.2. Barwertermittlung.....	3
1.3. Zinssatzermittlung.....	3
1.4. Ermittlung der Laufzeit	4
1.5. Anwendungsfall: Diskontierung von Ab-/Zuflüssen	4
2. Rentenrechnung	4
2.1. Endliche Rente.....	5
2.2. Ewige Rente	6
3. Exkurs Annuitätenrechnung (Tilgungs-)	7
Literatur	8
Bücher	8
Stichwortverzeichnis	8

Beispiel

Beispiel 1: Zinseszinsrechnung	2
Beispiel 2: Zinseszins	2
Beispiel 3: Barwert	3
Beispiel 4: Zinssatz	3
Beispiel 5: Laufzeit	4
Beispiel 6: Barwert einer Investition	4
Beispiel 7: Barwert nachschüssige Rente	5
Beispiel 8: Zinssatz einer nachschüssigen Rente	6
Beispiel 9: Laufzeit nachschüssige Rente	6
Beispiel 10: Ewige Rente	6
Beispiel 11: Ewige Rente nach einer geometrischen Reihe	6
Beispiel 12: Abzinsung ewige Rente	7
Beispiel 13: Berechnung einer Annuität	8

Formel

Formel 1: Endwert einer Einzahlung	2
Formel 2: Barwert einer Einzahlung	3
Formel 3: Ermittlung des Zinssatzes	3
Formel 4: Ermittlung der Laufzeit	4
Formel 5: Endwert einer nachschüssigen Rente	5
Formel 6: Barwert einer nachschüssigen Rente	5
Formel 7: Bestimmung der Rentenhöhe	5
Formel 8: Zinssatzermittlung einer endlichen Rente	5
Formel 9: Laufzeit einer nachschüssigen Rente	6
Formel 10: Ewige Rente	6
Formel 11: Kapitalwert einer Annuität	7
Formel 12: Annuitätenberechnung	8

¹ Es wird darauf verwiesen, dass alle Angaben in dieser Unterlage trotz sorgfältiger Bearbeitung ohne Gewähr erfolgen und eine Haftung ausgeschlossen ist.
Das Dokument ist zur Verwendung als PDF gedacht. Nicht alle hinterlegten Internetlinks sind vollständig im Text abgedruckt.

Vorwort

Eine Unternehmensbewertung basiert auf der Zinseszinsrechnung.

Abkürzungsverzeichnis

i	Zinssatz (in %)	q	Aufzinsungsfaktor = 1 + i
n =	Anzahl der Jahre	R	Rate
Kn	Endwert	t	Jahresindex
K ₀	Barwert = Anfangswert (= Einzahlung)		

1. Zinseszinsrechnung

Vertiefung

Bücher:

Falkenberg (1975), S. ; Kruschwitz (2010), S. 9 ff; Wüst (2006), S. 57 ff;

Zinsen können vor- oder nachschüssig (antizipativ oder dekursiv) anfallen. In der Unternehmensbewertung wird nachschüssig verzinst. Die Verzinsung kann jährlich oder unterjährlich erfolgen. Bei der unterjährlichen Verzinsung ist auch eine stetige Verzinsung denkbar. In der Unternehmensbewertung wird jährlich verzinst. Banken rechnen unterjährige Zeiträume mit 360 Tagen. In der Unternehmensbewertung kann mit Brüchen gerechnet werden z.B. 5 Monate = 5/12.

Für die Unternehmensbewertung werden Zu und Abflüsse zum Jahresende fingiert.

Die weiteren Formeln beziehen sich auf nachschüssige Jahresverzinsungen.

1.1. Endwert

Beispiel 1: Zinseszinsrechnung

Eine Einlage von 1.000 wird 5 Jahre mit 5% verzinst. Wie hoch ist der Endwert?

Jahr	0	1	2	3	4	5
Übertrag		1.000,00	1.050,00	1.102,50	1.157,63	1.215,51
Einlage	1.000,00					
Zwischen- summe	1.000,00	1.000,00	1.050,00	1.102,50	1.157,63	1.215,51
5%		50,00	52,50	55,13	57,88	60,78
Endwert	1.000,00	1.050,00	1.102,50	1.157,63	1.215,51	1.276,29

Wichtig für die Investitionsrechnung ist, dass alle Zu- und Abflüsse zum Ende einer Periode stattfinden, daher wird für die Einlage (=Investition) die Periode 0 vorgeschaltet, auf die sich in weiterer Folge alle Berechnungen beziehen.

Um den **Endwert der Einzahlung** zu berechnen, muss man jedoch nicht in einer Staffel den Zins für jedes Jahr berechnen. Einfacher geht es mit der Formel:

Formel 1: Endwert einer Einzahlung

$$K_n = K_0 * q^n$$

Bezogen auf das vorherige Beispiel lässt sich mit dieser Formel der Endwert leicht berechnen

$$EW = 1.000 * 1,05^5 = 1.276,28$$

Beispiel 2: Zinseszins

Die Bank bietet 2 Alternativen:

- a) Verzinsung 1. Jahr 5%; 2. Jahr 1%
- b) Verzinsung 1. Jahr 1%, 2. Jahr 5%

Var. a)			
Jahr	0	1	2
Übertrag		1.000,00	1.050,00
Einlage	1.000,00		
Zwischensumme	1.000,00	1.000,00	1.050,00
		5%	1%
		50,00	10,50
Endwert	1.000,00	1.050,00	1.060,50

Var. b)			
Jahr	0	1	2
Übertrag		1.000,00	1.010,00
Einlage	1.000,00		
Zwischensumme	1.000,00	1.000,00	1.010,00
		1%	5%
		10,00	50,50
Endwert	1.000,00	1.010,00	1.060,50

Da schafft das **Kumulativgesetz**² ($a * b = b * a$) Gleichheit.

1.2. Barwertermittlung

Will man umgekehrt den Anfangswert (= Einzahlung) ermitteln, muss man nur die Formel umformen:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

Wenn eine Zahl durch einen Faktor dividiert wird, kann man stattdessen diese auch mit dem Faktor hoch der negativen Exponentialzahl multiplizieren:

$$5 / 2 = 5 * 2^{(-1)} = 2,5$$

$$20 / 2^2 = 20 * 2^{(-2)} = 5$$

Formel 2: Barwert einer Einzahlung

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = K_n * q^{-n}$$

Beispiel 3: Barwert

Wenn ich in 5 Jahren 2.000 haben möchte, wie viel muss ich heute auf ein Spargbuch mit fixen 1,5% legen?

$$BW = 2.000 * 1,015^{(-5)}$$

$$BW = 1.856,52$$

Der Faktor $q^{(-1)}$ wird oft als **Barwertfaktor** bezeichnet, da er den Gegenwartswert (= Barwert) einer Einzahlung bezeichnet. Der Faktor $q^{(-1)}$ wird oft als **Diskontierungsfaktor** bezeichnet.

1.3. Zinssatzermittlung

Formel 3: Ermittlung des Zinssatzes

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Beispiel 4: Zinssatz

Welchem Zinssatz entspricht ein Endwert von 2.000 bei 7 Jahren Laufzeit und einem Anfangskapital von 1.000

² Vgl. Falkenberg (1975), S. 118.

$i = \sqrt[3]{2000/1000} - 1$ $i = 10,41$	$i = e^{[\ln(2.000/1000) * 1/7]} - 1$ $i = 10,41\%$
---	---

1.4. Ermittlung der Laufzeit

Formel 4: Ermittlung der Laufzeit

$$n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln q}$$

Beispiel 5: Laufzeit

Wie lange muss man 9.000€ zu 4% anlegen, damit man 10.000€ hat?

$$n = \ln(10.000/9.000) / (\ln 1,04)$$

n = 2,69 Jahre

1.5. Anwendungsfall: Diskontierung von Ab-/Zuflüssen

Basis der Investitionsrechnung sind die Zahlungsströme. Diese werden mit dem Barwertfaktor auf den Barwert der Investition diskontiert. Eine Investition ist dann sinnvoll, wenn der Barwert der Investition positiv ist.

Beispiel 6: Barwert einer Investition

Eine Investition erzielt bei einer Einzahlung von 1.000, Auszahlungen von 700, 500 und 300 in den Folgejahren. Der Zinssatz beträgt 8%. Wie hoch ist der Barwert der Investition?

	0	1	2	3
Einzahlung	-1.000,00			
Auszahlung		700,00	500,00	300,00
Zwischen- summe	-1.000,00	700,00	500,00	300,00
BWF	1	0,92592593	0,85733882	0,79383224
BW	-1.000,00	648,15	428,67	238,15
Summe	314,97			

2. Rentenrechnung

Vertiefung

Bücher:

Falkenberg (1975), S. 15 ff; Kruschwitz (2010), S. 43 ff; Wüst (2006), S. 111 ff;

Eine Barwerttabelle kann sehr groß werden, wenn zum Beispiel eine Investition einen Rückfluss über 30 Jahre aufweist. Eine mögliche Vereinfachung ist eine geometrische Reihe.

Geometrische Reihe:

Ist eine Zahlenfolge bei denen benachbarte Glieder den gleichen Quotienten aufweisen.

Auf der geometrischen Rente beruht die Rentenrechnung. Dabei sind verschiedene Arten zu unterscheiden³:

Rentenhöhe	<i>gleichbleibend</i>	veränderlich
Rentendauer	<i>Endliche Rente</i>	<i>Unendliche Rente</i>
Terminierung der Zahlung	Vorschüssige Rente	<i>Nachschüssige Rente</i>
Verhältnis von Zins und Rentenperiode	<i>Jährliche Rente mit jährlichem oder unterjährlichem Zins</i>	Unterjährige Rente mit jährlichem oder unterjährlichem Zins

In der Unternehmensbewertung interessieren uns nur gleichbleibende oder veränderliche, nachschüssige jährliche Renten mit jährlicher Verzinsung. Unterjährige Verzinsung und Ausschüttung sind zwar plausibel, aber zu kompliziert. Die Renten können endlich und unendlich sein.

2.1. Endliche Rente

Formel 5: Endwert einer nachschüssigen Rente

$$K_n = R \frac{q^n - 1}{q - 1} = R \frac{q^n - 1}{i}$$

Formel 6: Barwert einer nachschüssigen Rente

$$K_0 = R \frac{q^n - 1}{iq^n}$$

Beispiel 7: Barwert nachschüssige Rente

Eine Investition erbringt über 4 Jahre eine jährliche Auszahlung von 6.000€ bei einem internen Zinssatz von 5%.

$$BW = 6.000 \cdot (1,05^4 - 1) / (0,05 \cdot 1,05^4) = 21.275,70$$

Formel 7: Bestimmung der Rentenhöhe

$$R = K_n \frac{i}{q^n - 1}$$

$$R = K_0 \frac{iq^n}{q^n - 1}$$

Schwerer ist die Berechnung des Zinssatzes. Dabei wird die Gleichung des Endwertes so umgeformt, dass sich eine Funktion $f(i)$ mit dem Wert Null auf der einen Seite und die übrigen Variablen auf der anderen Seite stehen. Durch Differenzierung $f(i)$ erhält man die erste Ableitung $f'(i)$ daraus kann durch die Newtonsche Iteration der Zinssatz ermittelt werden, in dem man von i_k den Quotienten aus $f(i_k)$ und $f'(i_k)$ abzieht bis dieser Quotient Null ist.

Das Iterationsverfahren nach Newton führt schnellstmöglich zum richtigen Zinssatz.. Die Ableitung funktioniert auch mit dem Barwert (nur ist da die Formel deutlich komplizierter). Für die Ableitung ist eine Excel-Tabelle zu empfehlen, da man sich beim Taschenrechner schon man vertippen kann.

Formel 8: Zinssatzermittlung einer endlichen Rente

$$f(i) = -K_n + R \frac{q^n - 1}{i}$$

$$f'(i) = R \frac{iq^{n-1} - q^n + 1}{i^2}$$

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

³ Die für die Unternehmensbewertung relevanten sind kursiv gesetzt.

$$\text{Nullpunkt } i \Leftrightarrow \frac{f(i_k)}{f'(i_k)} = 0 \Leftrightarrow i_k = i_{k+1}$$

Beispiel 8: Zinssatz einer nachschüssigen Rente

Aus 40 nachschüssigen Einzahlungen von 1.000€ soll ein Endkapital von 200.000 entstehen.

K	ik	q	f(ik)	f'(ik)	f(ik)/f'(ik)
0	0,0600	1,0600	-45.238,03	3.889.638,90	-0,0116
1	0,0716	1,0716	8.218,74	5.386.282,38	0,0015
2	0,0701	1,0701	173,72	5.160.235,10	0,0000
3	0,0701	1,0701	0,08	5.155.358,90	0,0000
4	0,0701	1,0701	0,00	5.155.356,59	0,0000

Formel 9: Laufzeit einer nachschüssigen Rente

$$n = \frac{\ln(1 + \frac{iK_n}{R})}{\ln q}$$

$$n = \frac{\ln(\frac{R}{R - iK_0})}{\ln q}$$

Beispiel 9: Laufzeit nachschüssige Rente

Wie oft kann man aus einem Anfangskapital von 10.000 bei 4% Zinssatz eine Rente von 1.000 entnehmen?

$$n = \ln(1.000 / (1.000 - 0,04 * 10.000)) / \ln 1,04 = 13,024 \text{ gerundet } 13 \text{ Jahre}$$

2.2. Ewige Rente

Die geometrische Reihe weist eine zeitliche Begrenzung auf. Wenn sie gegen unendlich geht, kann die Summe durch folgende Formel berechnet werden:

Formel 10: Ewige Rente

$$K_0 = \frac{R}{i}$$

Beispiel 10: Ewige Rente

Ein Unternehmen erwirtschaftet einen Überschuss von 1.000. Es ist davon auszugehen, dass dieser Erfolg auf Dauer nachhaltig ist. Der interne Zinsfuß beträgt 8%

$$BW = R / i$$

$$BW = 1.000 / 0,08$$

$$BW = 12.500$$

Beispiel 11: Ewige Rente nach einer geometrischen Reihe

Laut Prognoserechnung wird im Detailprognosezeitraum von 3 Jahren ein Ertrag von jährlich 10.000 erzielt, anschließend ist eine ewige Rente mit 5.000 zu berücksichtigen, 9% Verzinsung

$$BW = BW \text{ Zeitrente} + \text{abgezinste ewige Rente}$$

$$BW = R_1 * (q^n - 1) / (i * q^n) + R_2 / i * q^{-n}$$

$$BW = 10.000 * (1,09^3 - 1) / (0,09 * 1,09^3) + 5.000 / 0,09 * 1,09^{-3}$$

$$BW = 25.312,95 + 42.899,08$$

$$BW = 68.212,03$$

Wenn eine ewige Rente auf eine Zeitrente folgt wird in der Praxis häufig der falsche Exponent für die Diskontierung gewählt. Das erste Glied der Zeitrente wird mit q^1 diskontiert, das k-te mit q^k . Eine ewige

Rente ab Periode 1 wird nicht diskontiert. D.h. mathematisch mit q^0 , das entspricht daher q^{1-1} . Eine ewige Rente nach 4 Jahren ist daher nicht mit q^4 , sondern mit q^{4-1} zu diskontiert.

Beispiel 12: Abzinsung ewige Rente

Ein Unternehmer erwartet folgende Ausschüttungen 2006: 700, 2007: 500, 2008. 300 und ab 2009: 400 Der interne Zinsfuß beträgt 8%

per 31.12.	2005	2006	2007	2008	2009
EZ/AZ		700,00	500,00	300,00	400,00
Faktor					0,08
Basis		700,00	500,00	300,00	5.000,00
k		1	2	3	4
q^{-k}		0,92592593	0,85733882	0,79383224	0,73502985
BW ger		648,15	428,67	238,15	3.675,15
Summe	4.990,12				

Würde die ewige Rente von Anfang an anfallen, würde sie nicht abgezinst, die nächste Tabelle zeigt die Verschiebung um jeweils ein Jahr.

	2005	2006	2007	2008	2009
EZ/AZ		400,00	400,00	400,00	400,00
Faktor		0,08	0,08	0,08	0,08
Basis		5.000,00	5.000,00	5.000,00	5.000,00
k		0	1	2	3
q^{-k}		1	0,92592593	0,85733882	0,79383224
BW		5.000,00	4.629,63	4.286,69	3.969,16

Der Wert ist daher richtig wie folgt zu berechnen

EZ/AZ		700,00	500,00	300,00	400,00
Faktor					0,08
Basis		700,00	500,00	300,00	5.000,00
k		1	2	3	3
q^{-k}		0,92592593	0,85733882	0,79383224	0,79383224
BW ger		648,15	428,67	238,15	3.969,16
Summe	5.284,13				

3. Exkurs Annuitätenrechnung (Tilgungs-)

Vertiefung

Bücher:

Falkenberg (1975), S. 20 ff; Kruschwitz (2010), S. 131 ff; Wüst (2006), S. 133;

Für viele Anwendungen (z.B. Leasing) benötigt man eine Annuitätenrechnung. Da es sich dabei um Verbindlichkeiten handelt sind die Zahlungen vorschüssig.

Annuität:
die Tilgung einer Kapitalschuld erfolgt in gleichmäßigen Jahreszahlungen.⁴

Formel 11: Kapitalwert einer Annuität

$$K_0 = R * \frac{q^n - 1}{iq^n}$$

⁴ Gabler, 11. Auflage Bd. 1.

Häufiger kommt es vor, dass man die gleich bleibende Annuität berechnen muss.

Formel 12: Annuitätenberechnung

$$R = K_0 * q^n * \frac{q-1}{q^n-1}$$

Beispiel 13: Berechnung einer Annuität

Ein Kredit iHv 50.000,00 soll bei 3,5% Zinsen in 5 Jahren

- a) in gleich hohen Raten;
- b) mit jährlich gleich hoher Tilgung abgestattet werden.

$$R = BW * q^n (q-1) / (q^n - 1)$$

$$R = 50.000 1,035^5 (1,035 - 1) / (1,035^5 - 1)$$

$$R = 11.074,07$$

Annuität	0	1	2	3	4	5
AB		50.000,00	40.675,93	31.025,52	21.037,34	10.699,58
Kredit	50.000,00					
Annuität		-11.074,07	-11.074,07	-11.074,07	-11.074,07	-11.074,07
Zins		1.750,00	1.423,66	1.085,89	736,31	374,49
SB	50.000,00	40.675,93	31.025,52	21.037,34	10.699,58	0,00

gleiche Tilgung	0	1	2	3	4	5
AB		50.000,00	40.000,00	30.000,00	20.000,00	10.000,00
Kredit	50.000,00					
Tilgung		10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00
Zins		1.750,00	1.400,00	1.050,00	700,00	350,00
Zahlung		11.750,00	11.400,00	11.050,00	10.700,00	10.350,00
SB	50.000,00	40.000,00	30.000,00	20.000,00	10.000,00	0,00

Literatur

Bücher

- Falkenberg: „Mathematik für den Wirtschaftspraktiker“, Linde 1975, zitiert: *Falkenberg (1975)*;
- Kruschwitz: „Finanzmathematik“, Oldenbourg, 2010, zitiert: *Kruschwitz (2010)*;
- Wüst: „Finanzmathematik“, Gabler 2006, zitiert: *Wüst (2006)*;

Stichwortverzeichnis

Annuität 7	Tilgungsrechnung <i>Siehe</i> Annuitätenrechnung
Annuitätenrechnung 7	Zinseszinsrechnung 2
Barwert 3	Zinssatzermittlung 3
Barwertfaktor 3	
Diskontierungsfaktor 3	
Endliche Rente 5	
Endwert 2	
Ewige Rente 6	
Kumulativgesetz 3	
Laufzeit	
Ermittlung 4	
Reihe	
geometrische 4	